4.2. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo II

1. La Regla de Cramer establece

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -1, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1$$

2. Utilizando la definición de determinante se tiene

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y & z \\ y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & z \\ x^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} \\ &= yz(z-y) - xz(z-x) + xy(y-x) \end{aligned}$$

Podríamos haber procedido mediante operaciones elementales:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & y^2 - yx & z^2 - zx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} = (y-x)\begin{vmatrix} 1 & z-x \\ y & z(z-x) \end{vmatrix} \\ &= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y) \end{aligned}$$

Para el caso del segundo determinante lo más razonable a priori es desarrollar por la última columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} + \cos\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \\ &= \cos\alpha \end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(2)\,3^4$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy - x + 1 - y$$

4. El determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{vmatrix}$$

es cero porque la tercera columna, C_3, es combinación lineal de las otras dos, de hecho $C_3 = 2C_1 + 3C_2$. Para

$$\begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \cos^2 c & 1 & \sin^2 c \end{vmatrix}$$

se aprecia que $C_2 = C_1 + C_3$, con lo cual vale cero.

5. Lo primero es inmediato por las propiedades de los determinantes. La segunda pregunta también es inmediata ya que $|A| = \left|A^T\right|$.

6. ¿Por qué $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$? Pues porque $AA^{-1} = \mathrm{Id}$ y si tomando determinantes se tendrá que
$$\left|AA^{-1}\right| = |\mathrm{Id}|\,.$$
Usamos ahora el hecho de que $|\mathrm{Id}| = 1$ y de que $|AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$ para llegar a
$$|A|\left|A^{-1}\right| = 1$$
y deducir así la igualdad pedida (que tiene sentido siempre que $|A| \neq 0$).

7. La matriz asociada a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuando
$$T(x, y, z) = (x + 2y + z,\ 3x + y + 2z,\ 3x + 2y + 2z)\,,$$
se determina calculando $T(\overrightarrow{e}_j)$:
$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{e}_1) &= T(1,0,0) = (1,3,3) \\ T(\overrightarrow{e}_2) &= T(0,1,0) = (2,1,2) \\ T(\overrightarrow{e}_3) &= T(0,0,1) = (1,2,2) \end{aligned}$$
Por tanto la matriz asociada a T es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
La matriz asociada a T^{-1} es la matriz inversa de A,en caso de que exista:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$
El cálculo que hay que hacer para establecer la igualdad anterior es sencillo: empleemos el Método de Gauss para probar que
$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

lo cual es equivalente a la igualdad (4.1):

$$\left(\begin{array}{cccccc} -2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & -6 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & -10 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & -6 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & -6 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & -6 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & 0 & 9 & 21 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} -6 & 0 & 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

8. El sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x + \ y + z = 0 \end{cases}$$

tiene como matriz asociada a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que tiene rango tres sii su determinante es distinto de cero. Calculémoslo:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(m+1) + 2 + (1-m) = m + 5 \end{aligned}$$

De manera que si $m \neq -5$ el determinante es distinto de cero y por ende el rango es 3. Usando el Teroema de Rouché-Frobenius se trata de un sistema CD y por consiguiente la única solución es la trivial.

Si $m = -5$ entonces la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que el menor $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ tiene determinante distinto de cero, por tanto el rango es dos (podemos tomar los dos primeros vectores fila o los dos primeros vectores columna, como vectores l.i.). En este caso Rouché-Frobenius establece que el sistema es CI. Por tanto la respuesta a la pregunta formulada es: para $m = -5$.

9. Decir que un polinomio $f(x) = ax^2+bx+c$, de grado 2, cumple $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$, $f(3) = 6$ significa que han de cumplirse las igualdades

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2 \\ a-b+c &= 4 \\ 9a+3b+c &= 6 \end{aligned}$$

Este sistema es CD (probarlo) y su solución es $c = \frac{9}{4}, a = \frac{3}{4}, b = -1$.Así que el polinomio pedido es

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{9}{4}.$$

10. Para encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos utilizar el menor 3×3 formado por las columnas 1, 3 y 4:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} = -a + 3$$

luego si $a \neq 3$ el rango es tres. Si $a = 3$ entonces volvemos a escribir la matriz y en lugar de volver a calcular determinantes hacemos operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia el rango es dos. Completar los detalles.

11. Estudiar para los distintos valores de a y b el sistema

$$\begin{cases} ax + y + bz = 0 \\ x + ay + 2z = b - 2 \\ x + ay + bz = a - 1 \end{cases} .$$

Operamos sobre la matriz del sistema: observamos que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 1 & a & 2 & b-2 \\ 1 & a & b & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 1 & a & 2 & b-2 \\ 0 & 0 & b-2 & a-b+1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\det A = (a^2-1)(b-2)$$

de modo que si a es distinto de ± 1 y b es diferente a 2 el rango es 2 y hay solución única. Si realizamos más operaciones podremos encontrar la solución.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 1 & a & 2 & b-2 \\ 0 & 0 & b-2 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & b-2a & 2a-ab \\ 1 & a & 2 & b-2 \\ 0 & 0 & b-2 & a-1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & b-2 \\ 0 & 1-a^2 & b-2a & 2a-ab \\ 0 & 0 & b-2 & a-1 \end{pmatrix}$$

por tanto el sistema será triangular y su solución se hace de manera recurrente, de abajo hacia arriba en este caso, obteniéndose

$$\left\{ x = \frac{2-ab+b^2-2b}{(b-2)\,(a+1)}, y = \frac{b^2-b-2a}{(b-2)\,(a+1)}, z = -\frac{-a+b-1}{b-2} \right\}$$

A continuación hemos de tratar los distintos casos:

a) Supongamos $a=1$. En esta situación tendremos que estudiar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 2 & b-2 \\ 1 & 1 & b & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que si b es distinto de 2 entonces $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, y tomando como menor básico a $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 2-b \end{vmatrix}$ tenemos que la solución se obtiene resolviendo

$$\begin{aligned} x+y+bz &= 0 \\ (2-b)z &= b-2 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} y + bz &= -x \\ (2-b)z &= b-2 \end{aligned}$$

i.e. $z = -1$ e $y = -x - bz = -x + b$. La forma vectorial del conjunto de soluciones (es un sistema CI) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con λcualquier número real.
Si $b = 2$ entonces llegamos al matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay rango uno (para A y para $\overline{A}$) el sistema es pues CI y la resolución se lleva a cabo estudiando el sistema

$$x + y + 2z = 0$$

Es obvio que las soluciones de éste se escriben como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$b)$ El caso en el que $a = -1$se discute de manera análoga.